المنحني الناتج من الحركة التدحرجية للشكل الاهليجي على منحني (الليث-اويد) دراسة في حالة نقطة ثابتة على المحيط الخارجي للشكل الاهليجي (Ellipse) .

ليث هادي منشد العصامي

قسم الهندسة المدنية
كلية الهندسة
جامعة ذي قار

المستخلص

تم بحث تكوين نوع جديد من المنحنيات غير المغلقة التي تم إيجادها من دراسة الحركة غير الانزلاقية للشكل الاهليجي (Ellipse) المتدحرج على مسار محدد ، حيث تم دراسة هذه الحركة من تطبيق طريقة رسم منحني (Cycloid) الشهير التي تعتمد تدحرج دائرة على مسار محدد [1] . ، لقد تم رسم المنحني في حالة حركة الشكل الاهليجي بدراسة حركة انتقال نقطة ثابتة على محيط الشكل الاهليجي خلال دورة أو أكثر للشكل الاهليجي حيث يمثل المحل الهندسي لها مجموعة نقط المنحني المتكون . تم دراسة نسب المنحني الناتج من خلال بحث حالات موضع نقطة محددة على محيط الشكل الاهليجي عند رأس محوره الكبير وعند رأس محوره الصغير في حالة أخرى ، واعتمدت الحالتان عند تحريك الشكل الاهليجي على مسار أفقي مستقيم محدد الطول بطول محيط (Ellipse) وفي حالة أخرى درست بتدحرج (Ellipse) على المحيط الخارجي لمنحني الليث-اويد، (Laith-oid Curve) وهو حالة جديدة من المنحنيات المتولدة من حركة نقطة مثبتة على المحيط الخارجي لدائرة عندما تتدحرج هذه الدائرة بحركة غير انزلاقية على مسار أفقي مستقيم بطول ضعف قطرها, وقد تمت دراسة حركة الشكل الاهليجي هنا في حالة تدحرجه على طول منحني كامل واحد(ليث-اويد) وفي حالة دراسية أخرى على امتداد منحنين متجاورين منه. تم العمل على بحث إمكانية تولد سطوح مغلقة أو مفتوحة من المنحني الناتج من هذه الحالات وبحث خصائصه .

The Curve Resulted From Rolling an Ellipse on the Laith-oid Curve –A Case Study of A Stationary Point on the External Circumference of the Ellipse

Abstract

This work studies a new type of open curves which resulted from the non-slippery motion of an elliptic shape rolled on a specific path . This investigation was done by using cycloid drawing method which depends on rolling a cycle on a specific path . The curve was drawn by studying the motion of a stationary point on the ellipse circumference during one or more ellipse cycles . The percentages , of the resulted curve was studied by the analysis of a specific point on the ellipse circumference on both large

and small axles . These two cases are taken in moving the ellipse on given length straight path equals to the ellipse circumference. The other studied case was rolling the ellipse on the outer circumference of the Laith-oid curve , which is a new case of curves that resulted from the motion of a stationary point on the outer circumference of a circle which rolls in a non-slippery motion on a straight line with a length equals to twice its diameter .The case of the ellipse rolling on one complete Laith-oid curve was studied . Another case was the rolling on two adjacent curves . The possibility of generating closed or open surfaces from the resulted curve was studied with their characteristics .

١. المقدمة

تتولد أنواع مميزة من المنحنيات المغلقة أو المفتوحة من حركة نقطة مثبتة على دائرة عندما تدور على امتداد مسار محدد فيعمل التنوع الكبير في إمكانيات تولد هذه المنحنيات على توفير مجال واسع جداً للبحث فيها حيث إن تغير موضع النقطة على محيط الدائرة أو تقريبها من مركزها أو إطالة وتقصير المسار الأفقي للحركة أو جعل هذا المسار غير مستقيم بأن تدور الدائرة على المحيط الخارجي أو الداخلي لدائرة أخرى ,يؤدي إلى تغير كبير ومجال أوسع للبحث, وقد درست حالة الحركة الدائرية منذ أيام العالم الكبير نيوتن وكان لها دور في علم الرياضيات والفلك ودراسة حركة الأمواج [2].

يهدف البحث إلى دراسة نوع المنحنيات التي يمكن توليدها من حركة نقطة تم تثبيتها على محيط الشكل الاهليجي(Ellipse) بدلاً من الدائرة وتم العمل على دراستها عند تحريكه حركة تدحرجية على مسار أفقي حدد بطول محيط الشكل الاهليجي حيث يعمل طول هذا المسار وزاوية التدوير للشكل الاهليجي وكذلك أبعاده (المحور الكبير والمحور الصغير) وكذلك موضع النقطة الثابتة نسبة إلى الشكل الاهليجي , كباريمتر ينظم ويتحكم من خلاله بنسب المنحني الناتج ,لقد تم اعتماد برامج المحاكاة في رسم واستخدام المنحني الناتج في توليد سطوح ثنائية وثلاثية الإبعاد سيتم دراستها بشكل مفصل خارج مجال البحث الآن .

٢. الخصائص الهندسية للمسألة

بأعتماد خطوات الطريقة الهندسية لرسم المنحني الناتج من حركة تدحرج دائرة على مسار أفقي والتي تنتج منحني يعرف بـ (منحني الليث-اويد) وهو منحني من عائلة تتبع منحني (Cycloid) الشهير ، المتمثلة برسم دائرة تسمى بالدائرة الراسمة بنصف قطر محدد , يتم دحرجتها على مسار أفقي بطول محيطها , يتم تقسيم محيط الدائرة والمسار الأفقي إلى نفس العدد من النقاط (p), حيث يتم من نقاط محيط الدائرة رسم مستقيمات أفقية موازية إلى المسار الأفقي لتحرك الدائرة الراسمة فيما يتم من النقاط التي تم تقسيم المسار الأفقي لها رسم دوائر راسمة بعدد هذه النقاط وبنفس قطر الدائرة الراسمة الأولى, إن نقاط تقاطع الدوائر الراسمة مع المستقيمات الأفقية تسلسلياً يشكل نقاط المنحني والتي عند توصيلها تكون منحني غير مغلق هو منحني (Cycloid) فيما لو تم إضافة نقطة بؤرة عند منتصف المسار بطول قطر الدائرة الراسمة فالمنحني الناتج هو(منحني الليث-اويد) , إن المسافة الأفقية بين نقطة بداية المنحني ونقطة نهايته تعادل طول محيط الدائرة الراسمة وارتفاع قمة المنحني

يعادل طول قطر الدائرة الراسمة [3], ورياضياً فان المنحني ينشأ من حركة نقطة ثابتة على محيط الدائرة المتدحرجة بلا انزلاق على مسار أفقي يعادل طول محيطها عندما تكمل الدائرة دورة كاملة, يبدأ تكون منحني جديد من نقطة نهاية المنحني المكتمل عند بدئ الدائرة الراسمة بالدوران أكثر من دورة واحدة لتكمل منحنٍ ثان عند إكمالها دورة ثانية على مسار أفقي جديد يعادل طول محيطها (لاحظ الشكل ٥).

٣. الطريقة الهندسية

هدف البحث إلى تطوير طريقة إنتاج هذا النوع من المنحنيات عبر اعتماده على تطوير الطريقة الهندسية السابقة إلى حالة جديدة لتوليد حالة من منحنيات جديدة ودراستها, حيث اعتمدت الطريقة أيضاً على دائرة راسمة بنصف قطر محدد (a) يتم تحركها على مسار أفقي محدد بطول محيط الدائرة الراسمة أو يمكن إن يحدد بقيمة أخرى , ويتم تقسيم القطر العمودي للدائرة الأولى (الدائرة الراسمة الأولى عند نقطة الأصل حيث تقع أولى نقط المنحني) إلى عدد من النقاط (p) يساوي نصف عدد الدوائر الراسمة التي يتم رسمها من نقط تقسيم المسار الأفقي (الذي هو في هذه الحالة الدراسية مستقيم أفقي) حيث يكمل العدد من النقط على امتداد النصف الآخر من محيط الدائرة الراسمة الأولى , وفي حالة البحث المحدد تم اعتماد توليد المنحني من حركة الشكل الاهليجي (Ellipse) محل الدائرة التي اعتمدت في رسم منحني (السايكلويد والليث –اويد) السابقة .

يتم رسم الشكل الاهليجي بإبعاد محددة (طول محوره الكبير المتعامد على خط الأفق ويمثل وحدة قياس واحدة) وقد تم رسمه داخل دائرة راسمة بحيث يعادل طول محورة الكبير طول قطر الدائرة وطول محورة القصير يعادل نصف طول قطرها , **وهي حالة اختيارية للبحث** , ثم تم تقسيم محيط الدائرة إلى أجزاء متساوية (p)عبر توزيع عدد محدد (حدد هنا بعشرين نقطة) توزع على مسافات متساوية على المحيط ومن مواضع هذه النقط يتم رسم مستقيمات متوازية مع خط الأفق بطول المسار الأفقي الذي حدد هنا بطول محيط الشكل الاهليجي ,نقط المنحني يتم تحديدها من نقاط تقاطع الشكل الاهليجي المتحرك على طول المسار الأفقي مع الخطوط الأفقية المرسومة من نقاط محيط الدائرة الراسمة الأولى والتي منها يتشكل المنحني المتولدة من هذه الطريقة (لاحظ الشكل ١) .

٤. الحالة الدراسية

٤. ١ الحركة الانزلاقية على مسار أفقي محدد

تم رسم شكل اهليجي (Ellipse) (حدد طول محورة الأكبر كوحدة قياسية واحدة) بحيث يتعامد محوره الأكبر على المسار الأفقي الذي يرسم بطول محيط الشكل الاهليجي , تم تقسيم محيط شكل الاهليجي إلى أجزاء متساوية (p)عبر توزيع عدد محدد (حدد هنا بعشرين نقطة) توزع على مسافات متساوية على المحيط ومن مواضع هذه النقط يتم رسم مستقيمات متوازية مع خط الأفق بطول المسار الأفقي الذي حدد هنا بطول محيط الشكل الاهليجي ثم يقسم خط الأفق إلى مسافات متساوية عبر نفس العدد من النقط المقسمة لمحيط الاهليج ومن هذه النقط على خط الأفق يتم رسم نفس الشكل اهليجي وعلى امتداد خط الأفق بحيث يتعامد محورة الأكبر على المسار الأفقي نقط المنحني(p) يتم تحديدها من نقاط تقاطع الشكل الاهليجي المتحرك على طول المسار الأفقي مع الخطوط الأفقية المرسومة من نقاط محيط الشكل الاهليجي الأولى والتي منها يتشكل المنحني المتولدة من هذه الطريقة (لاحظ الشكل ٢).

المنحني الناتج هو منحنٍ غير مغلق أي له نقطة بداية ونهاية نجدهما عند خط الأفق على امتداد بطول محيط الشكل الاهليجي مع نقطة قمة التحدب التي نجدها على ارتفاع يعادل طول المحور الأكبر للشكل الاهليجي , والمنحني هنا نجده لا يكوّن عقد عندما تلتقي نهاية وبداية منحنين معاً بعكس المنحنيات المتولدة من الحركة غير الانزلاقية للدائرة (حالات منحني السايكلويد مثلاً),والمنحني هنا يمتد بطول (**٣,٧٣٥٧**) وحدة قياس, ويغطي مساحة داخلة (أسفل المنحني وخط الأفق) تبلغ(**١,٨٩٢٩**) وحدة قياس ,حيث طول المحور الكبير يمثل وحدة قياس واحدة .

٢.٤ الحركة التدحرجية على مسار أفقي محدد

باعتماد الشكل الاهليجي بمواصفاته السابقة يتم هنا دراسة الحالة للمنحني المتولد من الحركة التدحرجية غير الانزلاقية للشكل الاهليجي على مسار أفقي نحدده بطول محيط الشكل الاهليجي ,تم تحريك الشكل الاهليجي تدحرجا بلا انزلاق, حيث تم دراسة دورانه دورة كاملة حوله لإكمال رسم منحنٍ واحد (نقط المنحني يتم تحديدها من نقاط تقاطع الشكل الاهليجي المتحرك على طول المسار الأفقي مع الخطوط الأفقية برمز(**m**)المرسومة من نقاط محيط الشكل الاهليجي الأول), المنحني الناتج نجده سيكون منحني غير مغلق عند خط الأفق ,مع نقطة قمة التحدب التي ظهرت على ارتفاع يعادل طول المحور الأكبر للشكل الاهليجي , والمنحني لم يكون عقد ,حيث يكون بوضع متعامد مع خط الأفق عند نقطتي البداية والنهاية ,فالمنحني الناتج هنا هو محل هندسي لمجموع المواضع التي تتموضع بها النقطة (p)الثابتة على محيط الشكل الاهليجي المتدحرج **((**p) نقطة ثابتة هنا على رأس المحور الأكبر ابتداءاً من نقطة تعامده على بداية الخط الأفقي**)** والمنحني هنا سيمتد بطول (٣,٣٥٦) وحدة قياس وسيغطي مساحة داخلة (أسفل المنحني وخط الأفق) هي (**١, ٧٥٧٧**) وحدة قياس حيث طول المحور الكبير يمثل وحدة قياس واحدة (لاحظ الشكل ٣).

يمكن ملاحظة تغير موضع النقطة (p) من موضعها الحالي على محيط الشكل الاهليجي عند رأس المحور الأكبر إلى موضع آخر عند رأس المحور الأصغر أو عند مركز الشكل الاهليجي , وهي حالات خاصة جديدة تتولد منها حالات أخرى خاصة من المنحنيات وهي خارج الحالة الدراسية للبحث .

٣.٤ الحركة التدحرجية على مسار منحني محدد

في هذه الحالة من البحث تم دراسة المنحني المتولد من الحركة التدحرجية غير الانزلاقية للشكل الاهليجي عند تحريكه على منحنٍ محدد وفي هذه الحالة تم اختيار منحني (الليث- اويد) كحالة اختبارية أصيلة حيث لم يتم تجربتها من قبل (المنحني تم ابتكاره ودراسته من قبل الباحث),وحدد البحث حركة الاهليج ضمن السطح الخارجي للمنحني المتولد من دائرة راسمة يعادل قطرها طول المحور الأكبر للشكل الاهليجي وضعف طول المحور الأصغر , فيما اعتمد دراسة المنحني الناتج على تموضع النقطة الراسمة (p) في حالتين ايضاً بتثبيتها عند موضعين هما رأس المحور الأكبر في حالة وعند رأس المحور الأصغر للشكل الاهليجي , لتضيق مجال البحث (لاحظ الشكل ٦). عند تموضع النقطة الراسمة (p) عند رأس المحور الأكبر للشكل الاهليجي والذي يدور بدون انزلاق على المحيط الخارجي لمنحني (الليث-اويد) , بحيث يكون المحور الأصغر للاهليج متعامداً على سطح المنحني ومن نقطة بداية المنحني (النقطة p(x,y)), في هذه الحالة نلاحظ :

- المنحني الناتج يكون منحنياً متناظراً يبدأ وينتهي عند نقطتين تقعان إلى الخارج (أسفل) من خط الأفق , ويشكل المنحني انتفاخاً(تحدباً) إلى الأعلى كلما تقدم الاهليج باتجاه قمة منحني (الليث-اويد) ليحقق أعلى ارتفاع له عند تماس الشكل الاهليجي مع منحني(الليث-اويد) عند نقطة p (0,a) .
- ثم يبدأ المنحني الناتج بالانحدار حيث يتقاطع مع منحني (الليث-اويد) عندما يكون الاهليج قد وصل إلى النقطة p(a,a) , حيث يكون الاهليج قد تدحرج على طول نصف المنحني راسماً منحنياً طوله (٥,٢٢٩١ وحدة طول) (لاحظ الشكل ٦) .
- ومع إكمال الاهليج دورة حول المنحني كله (طول منحني الليث-اويد =٣,٤٦٧ وحدة طول) فان المنحني الكامل الناتج بشكله المتناظر سيبلغ طوله (١٠,٤٥٨٢ وحدة طول) (لاحظ الشكل ٧) .
- الملاحظ ان الشكل الاهليجي عندما يبدأ بالتدحرج على منحني ثان مجاور (منحني الليث-اويد) فأن المنحني المتولد يظهر بشكل جديد غير مستقر حيث يكون بطول (٦,٥٥٦٨ وحدة طول) أي بزيادة تبلغ نسبة (٢٥,٣٩%) من طوله عند دوران الاهليج على منحني (الليث-اويد) الأول المجاور .
- كذلك يكون قد صنع قمة له ترتفع عن منحني (الليث-اويد) بمقدار طول المحور الاكبر للاهليج بعكس المنحني الأول المرسوم من دوران الاهليج على منحني (الليث-اويد) الأول المجاور(لاحظ الشكل ٧) .

٥. الاستنتاجات

للحالات قيد الدرس، يمكن الخروج بالاستنتاجات الآتية :

١- إن المحل الهندسي من نقطة مثبتة على محيط الشكل الاهليجي المتحرك على مسار ما محدد الطول يؤدي إلى توليد منحنٍ متناظر غير مغلق , تشكل النقطة في أي موضع لها إثناء هذه الحركة نقطة على المنحني الناتج .

٢- إن تقسيم المسار الأفقي إلى عدد من النقط تفصل بينها مسافات متساوية (s) ,توفر وسيلة للتحكم في شكل وحجم العقدة المتولدة بين المنحنيات المتجاورة , بشكل عكسي حيث يؤدي إلى زيادة التباعد الأفقي بين مراكز الدوائر الراسمة للمنحني وبعلاقة تتحكم بتصميمه ومن ثم تقليل أو إلغاء تكون العقد.

٣- تقسيم قطر الشكل الاهليجي الراسمة الأولى إلى مسافات متساوية (n) , وفر لنا تطويراً جديداً للطريقة الحالية في رسم هذا النوع من المنحنيات , مما يجعلها مع القيمة (s) باراميتر دقيق في توليد حالات جديدة من المنحني حيث درس البحث حالتين منها .

٤- يوفر المنحني الناتج بهذه الطريقة وبحالاته المدروسة إمكانية توليد سطوح هندسية جديدة مغلقة مركزية تتمثل بنوع جديد من القباب غير المستدقة القمة والسطوح القرصية.

٥- يمكن إن يولد هذا النوع من المنحنيات سطوحاً مغلقة فالقبة الناتجة هنا تشترك مع القبة النصف دائرية من حيث كون قمتها منحنية الجوانب بتحدب سلس عند الاقتراب منها وحتى منطقة الإسناد ولكن بزاوية قاعدة المضلع بأقل من ٦٠ درجة والتي تعطيها القبة نصف الدائرية و يمكن الرجوع إلى النسب الرياضية للمنحني في تصميم هذا النوع من القباب أو العقود .

٦- هذه الطريقة جديدة من حيث توليدها لنوع جديد من المنحنيات الشبيهة بمنحني (*cycloid*) لكنها تولدها فقط من خلال اعتماد الشكل الاهليجي بدلاً من الدائرة وجعل الحركة انزلاقية أكثر منها حركة حرة حيث إن قيمة المسافة الأفقية المقطوعة من الشكل الاهليجي بالمقارنة مع قيمة (u) لايمكن إيجادها من العلاقة (*au*) حيث تكون اقل , مما يتطلب اعتماد العلاقة (*su/180*) على المنحني الناتج .

٧- باستخدام النسب الرياضية للمنحني بحالاته وباستخدام برامج المحاكاة , تظهر إمكانيات أوسع لهذا النوع من المنحنيات خاصة عند زيادة طول المسار الأفقي وقيمة كل من (*s*) و (*n*) بغض النظر عن عدد دورات الدائرة الراسمة, مما يفتح مجالات أوسع للبحث .

٦. المصادر

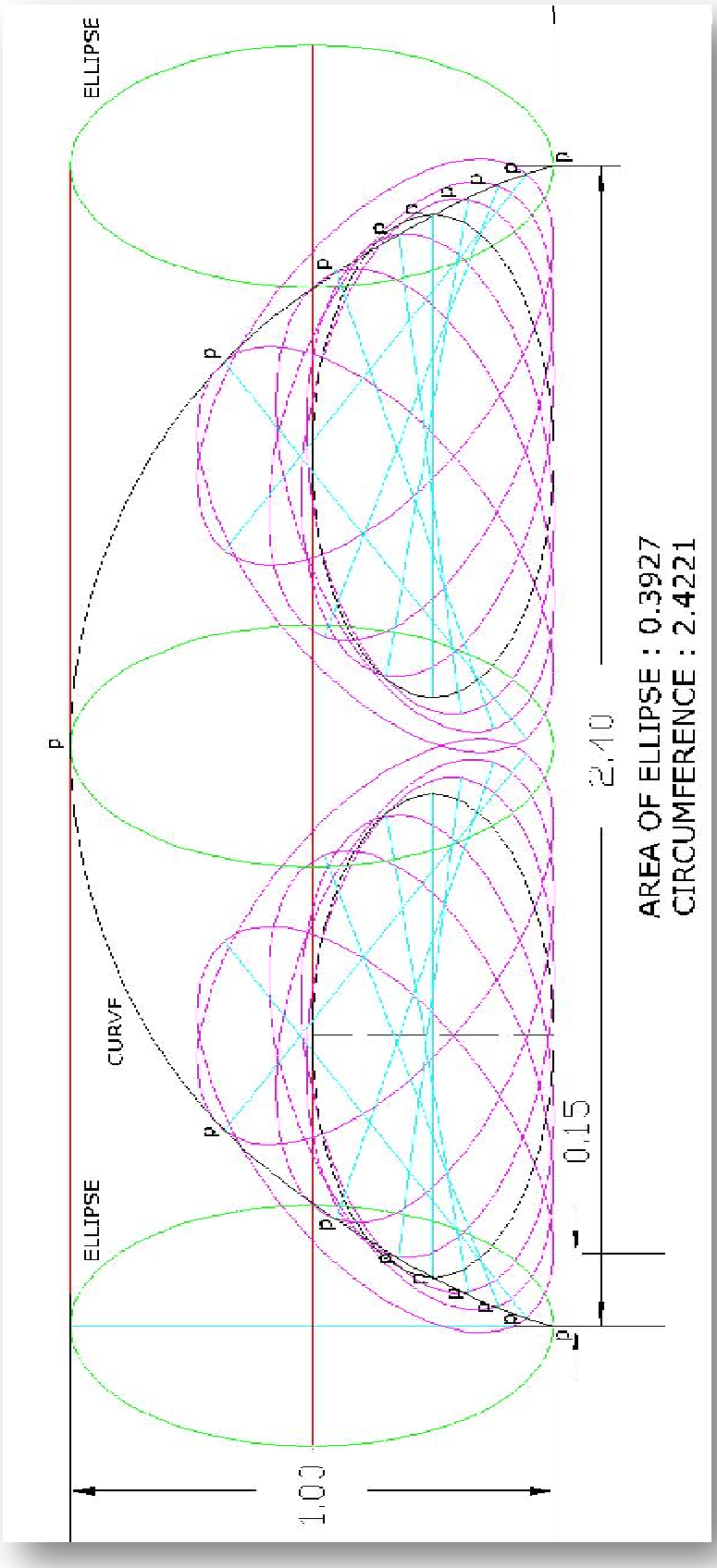
[1] Babbitt ,E. D., "The principle of light and color University ",Book –New Hyde Pat N-Y- 1998 P. 194.

[2] Porter ,T. & Goodman, S.," Manual Of Graphic Techniques For Architects" , Graphic Dsigners , & Artists –London-Butterworth-1989 P.97

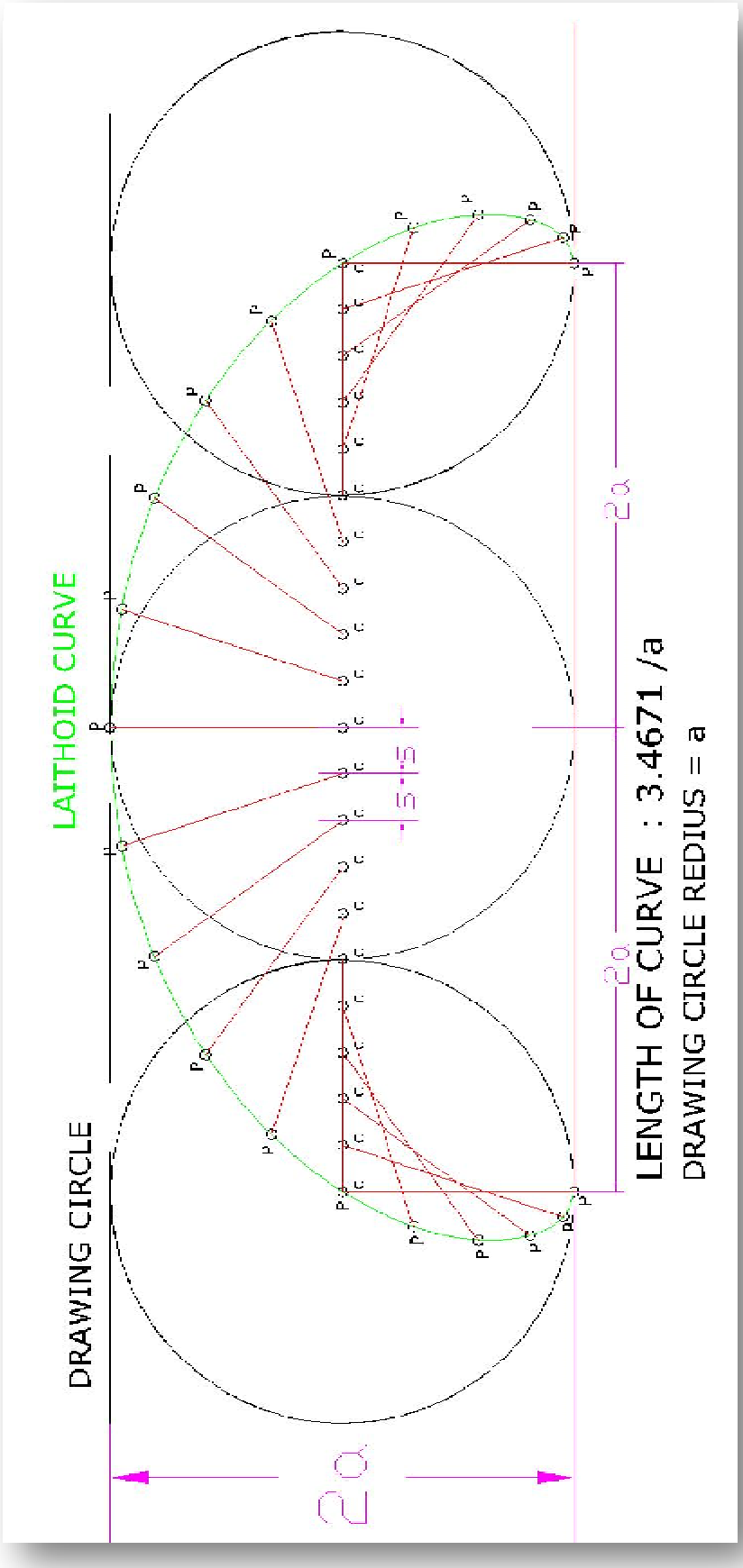
[3] Tutor, M.," Famous Curve Index. Visual Dictionary of Special Plane Curves ", cycloid, Hypocycloid.

٧. رموز البحث

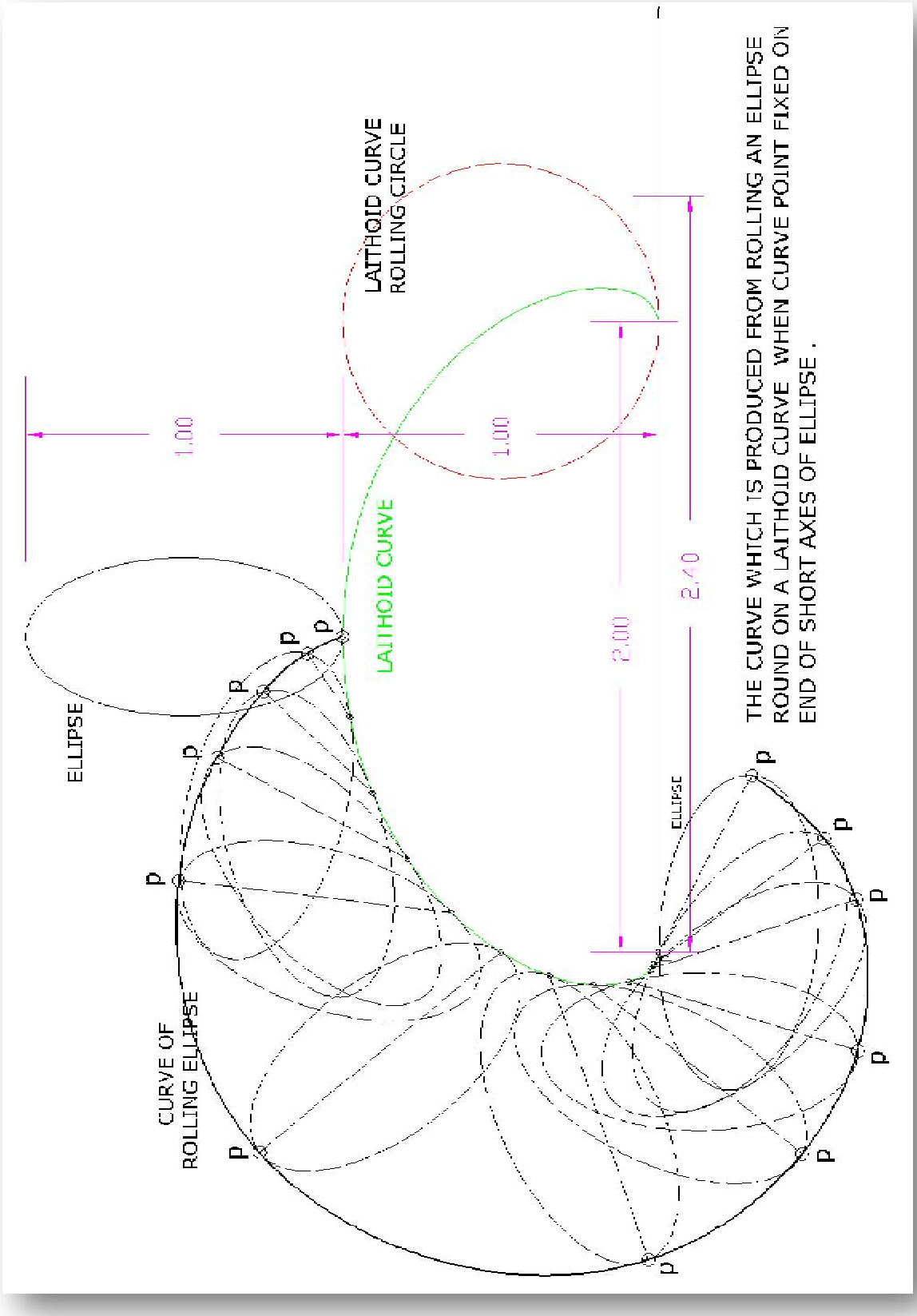
الرمز	الدلالـــــة
a	نصف قطر الدائرة الراسمة .
Ellipse	الشكل الاهليجي الراسم للمنحني الناتج .
n	المسافة بين النقط التي ينقسم إليها محيط الدائرة الراسمة .
L	المسافة الأفقية التي يقطعها الشكل الاهليجي الراسم .
p	نقطة للمنحني مثبتة دائما على محيط الشكل الاهليجي الراسم .
s	المسافة الأفقية بين النقط التي ينقسم إليها المسار الأفقي .
u	زاوية دوران الشكل الاهليجي الراسم على المسار الأفقي (Degree).
x	الاحداثي السيني لنقط المنحني الناتج .
y	الاحداثي الصادي لنقط المنحني الناتج .
منحني (الليث-اويد)	المنحني الناتج من حركة تدحرج دائرة على مسار أفقي محدد (*4a*) (*LAITH-OID CURVE*)وهو منحني مبتكر للباحث يضاف كحالة خاصة لعائلة منحنيات تتبع منحني (*Cycloid*) .



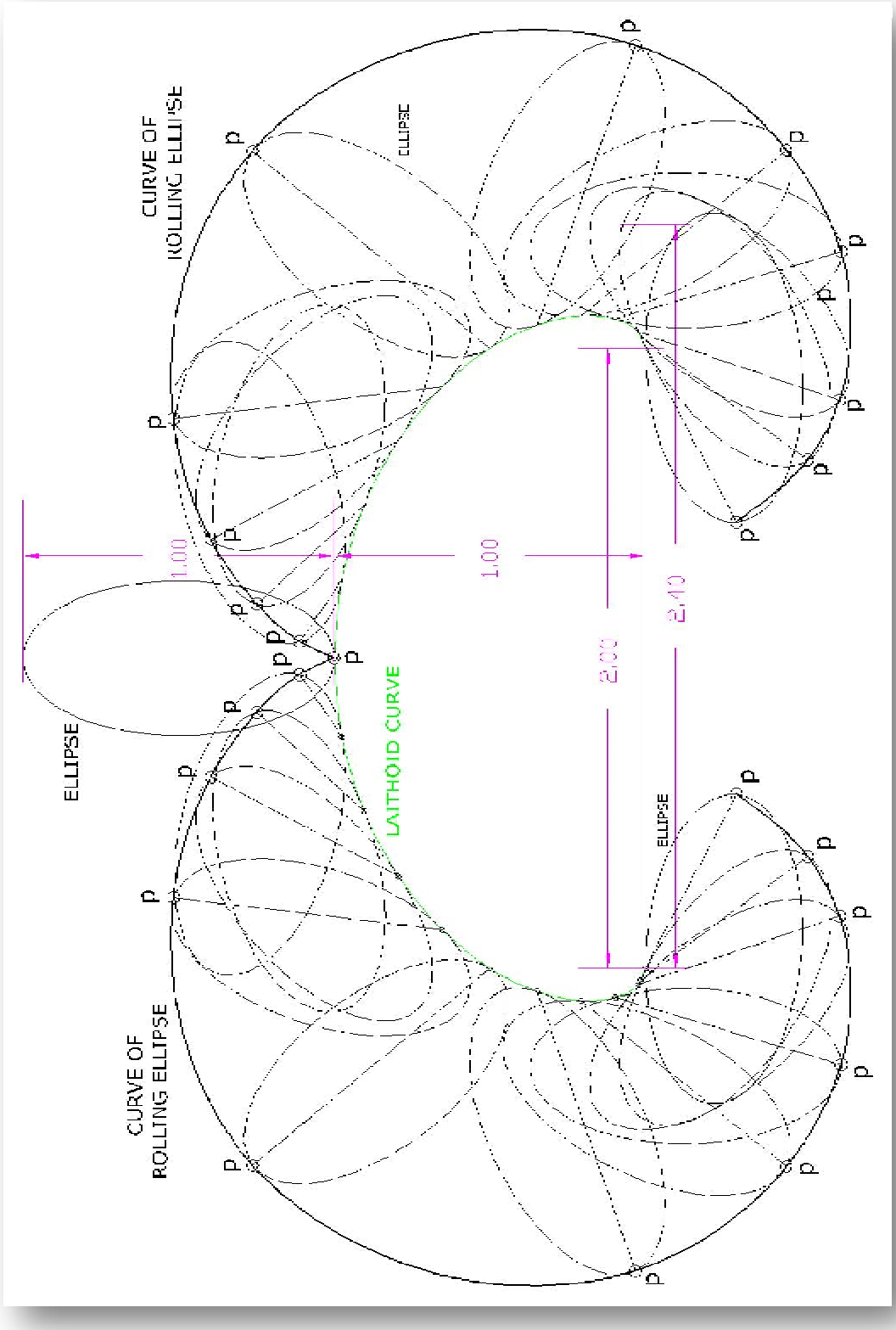
الشكل (١).الحالة الثانية , المنحني الناتج من الحركة التدحرجية للشكل الاهليجي على مسار أفقي بطول محيطه ,و المنحني الناتج يتمثل في مواضع النقطة عند رأس الاهليجي .



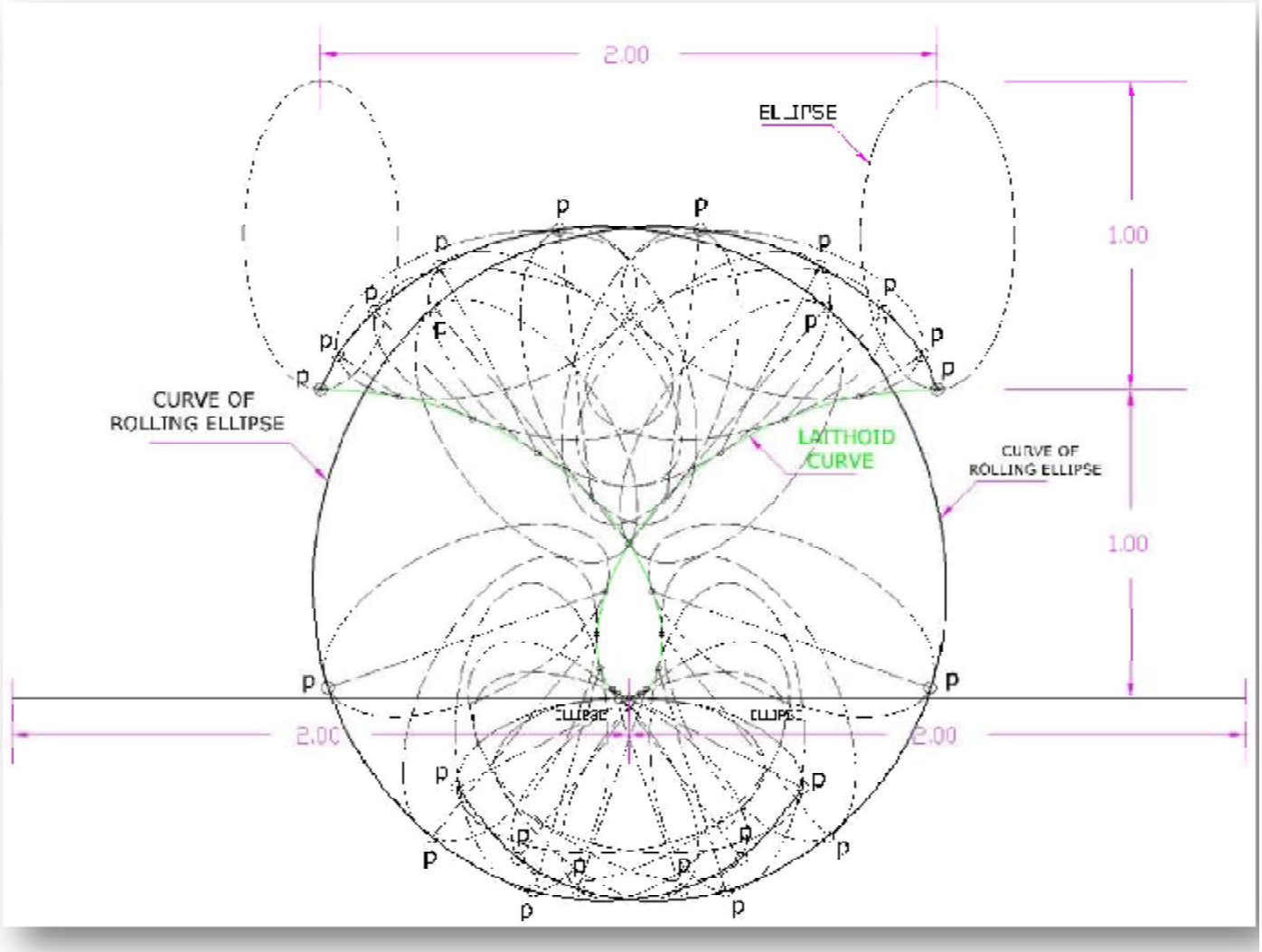
الشكل(٢). منحنى (الليث-اويد) حالة خاصة جديدة من المنحنيات الشبيهة بمنحنى السايكويد, التي تنتج من الحركة التدحرجية لدائرة على امتداد مسار أفقي بطول ضعف قطرها (نصف القطر للدائرة الراسمة للمنحنى).



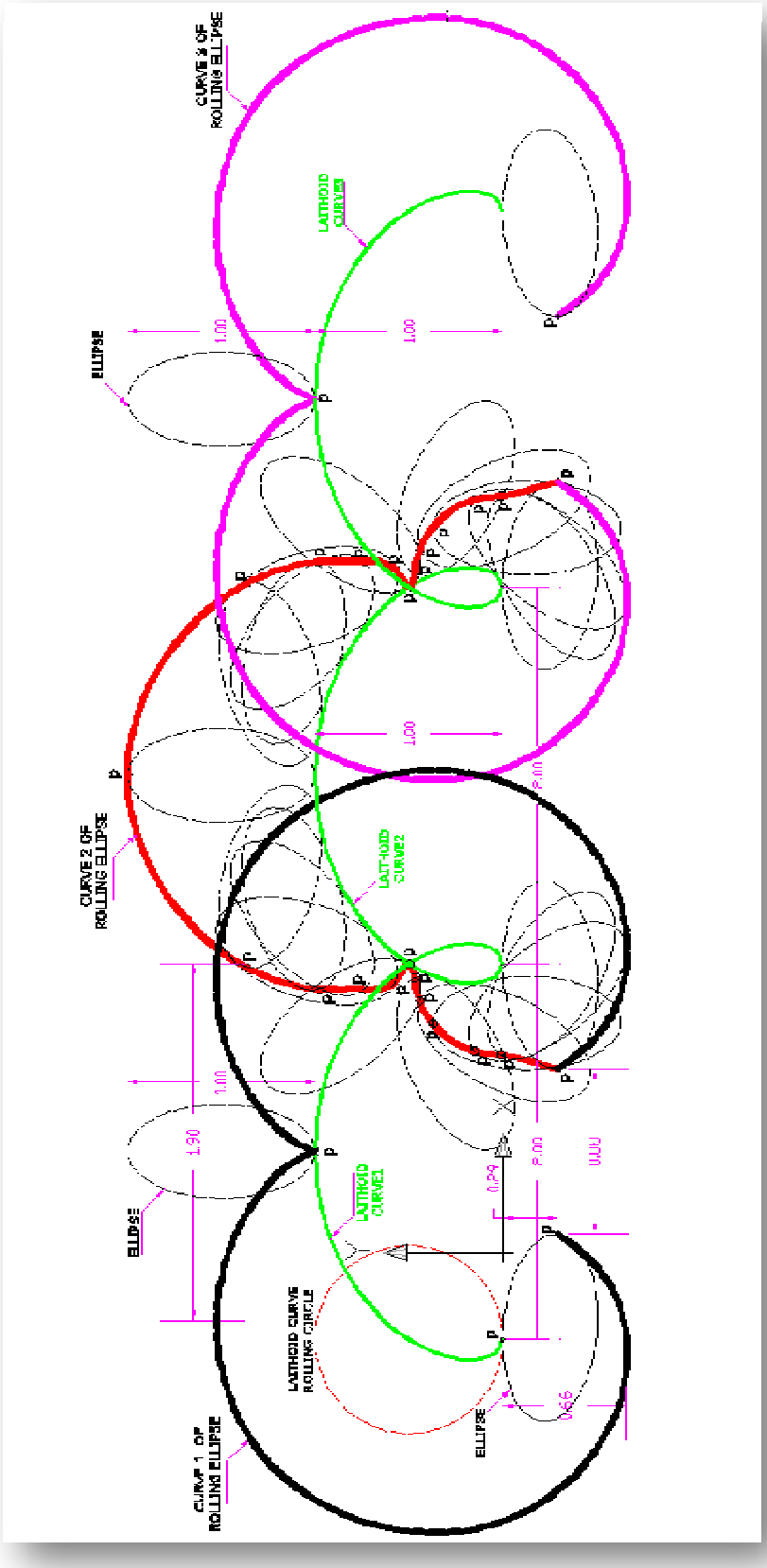
الشكل(٣). الحالة الدراسية ,تدحرج الشكل الاهليجي على المحيط الخارجي لمنحني (الليث-اويد) ابتداء من نقطة بداية المنحني و عندما تقع النقطة للمنحني الجديد عند نهاية المحور الأكبر الموازي لخط الأفق,وهنا يظهر المنحني المتكون من حركة الاهليجي على طول نصف منحني الليث-اويد.



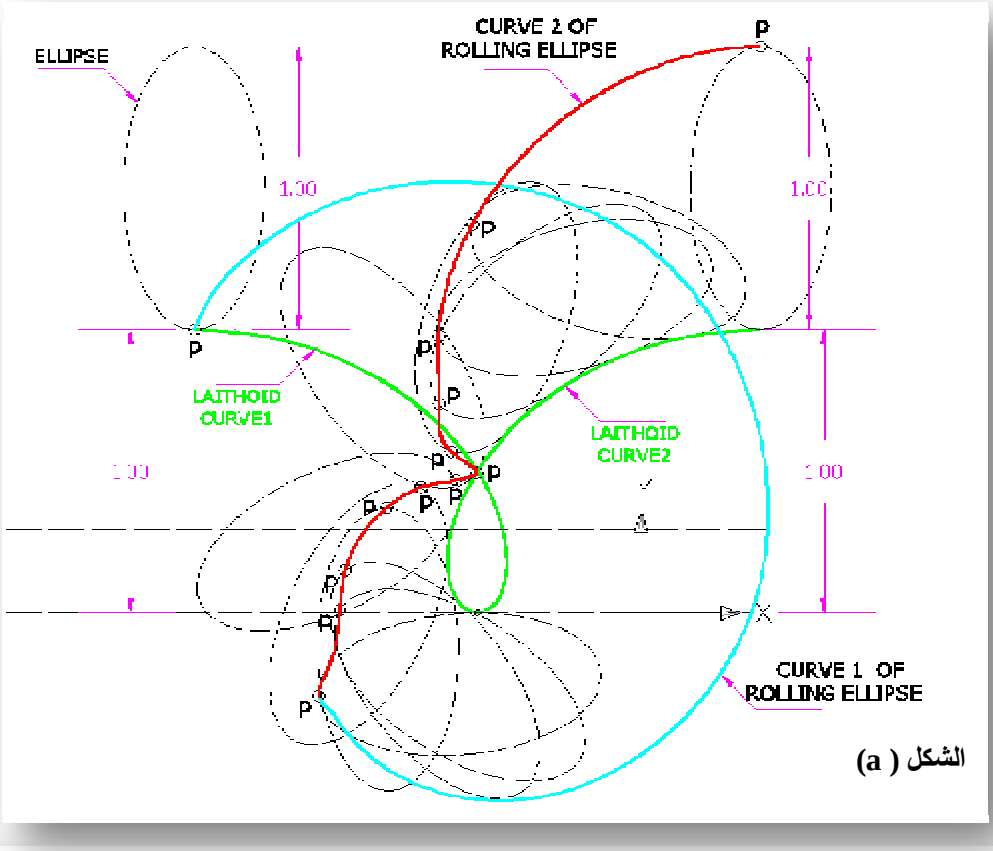
الشكل(٤).الحالة الدراسية ,اكتمال تدحرج الشكل الاهليجي على الطول الكلي للمحيط الخارجي لمنحني (الليث-اويد) ,(طول المحور الكبير للشكل الاهليجي يمثل وحدة قياس واحدة).

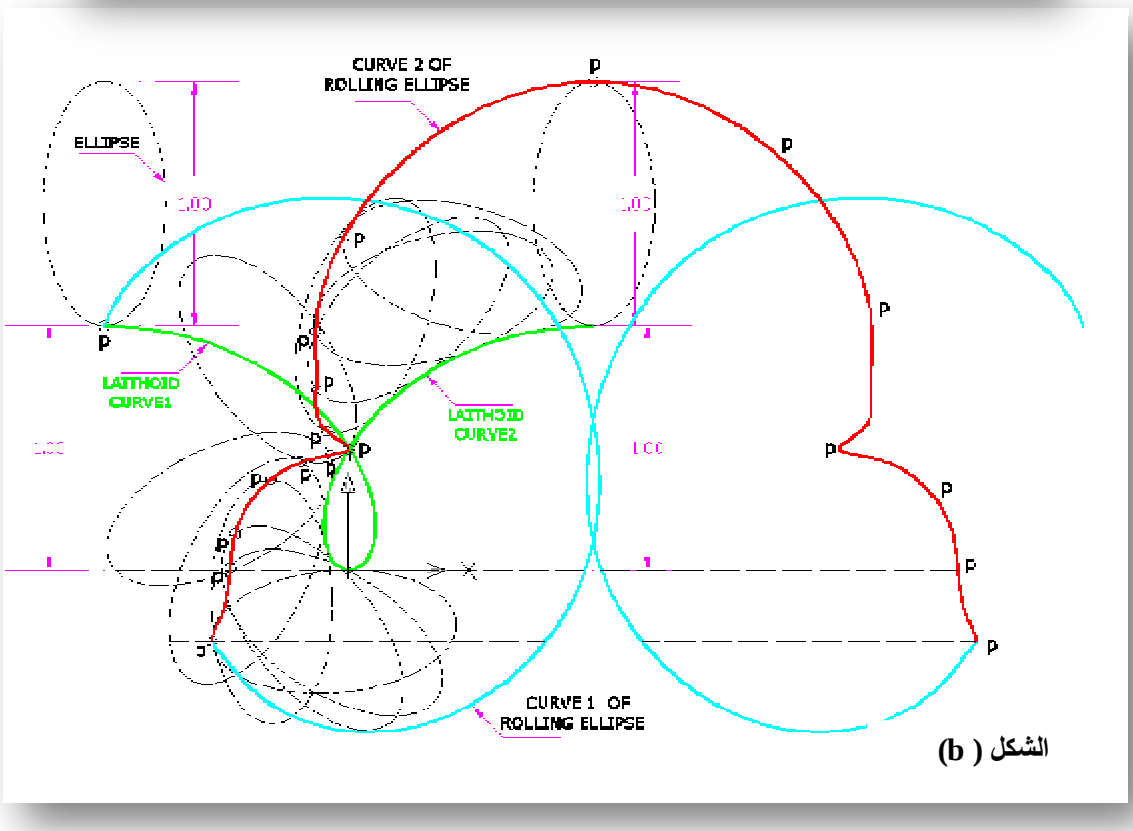


الشكل(٥).الحالة الدراسية , تدحرج الشكل الاهليجي على المحيط الخارجي لمنحني (الليث-اويد) ,حالة المنحني المتكون عند منطقة تكون العقدة بين منحنيين متتالين من منحنيات الليث-اويد ,(*طول المحور الكبير للشكل الاهليجي يمثل وحدة قياس واحدة*).

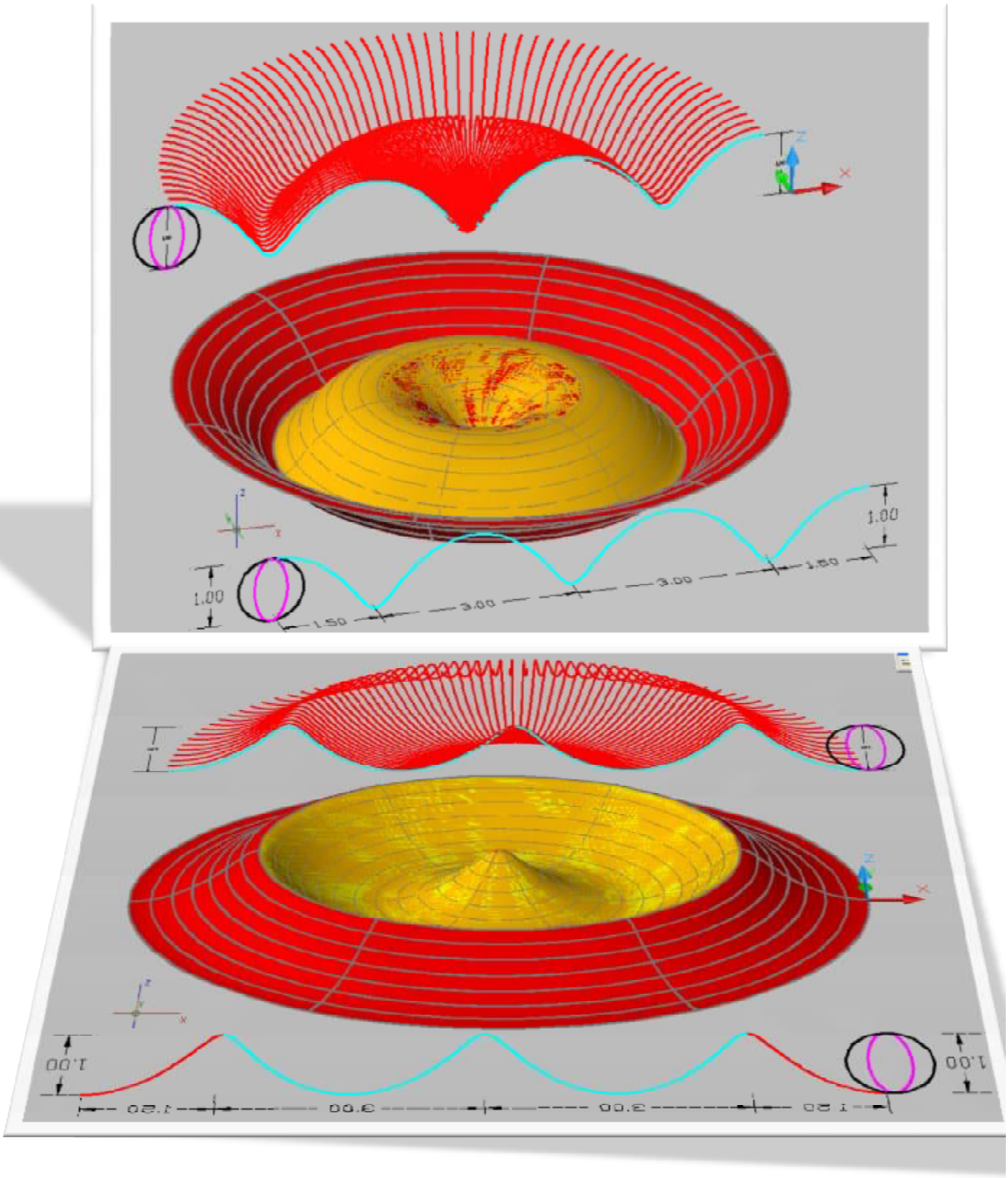


الشكل (٦).الحالة الدراسية الرابعة, المنحني المتكون من حركة الشكل الاهليجي على ٣ منحنيات(ليث-اويد) متجاورة .





الشكل (٧) . دراسة تكون منطقة العقدة عند نهاية الشكل (a) و بداية الشكل (b) ، عندما u تزيد عن ٣٦٠ وكما في الشكل (b).



الشكل(٨).دراسة حالة تشكيل سطوح مغلقة , دراسة الحالة الأولى ,باستخدام برنامج AutoCAD ,(طول المحور الكبير للشكل الاهليجي يمثل وحدة قياس واحدة).

الجدول(١). نتائج البحث – النسب الرياضية للمنحني الناتج .

النقطة(p)	الاحداثي		النقطة(p)	الاحداثي	
	(x)	(y)		(x)	(y)
١	+١,٠٠	-٠,٥٠	١٢	+٢,١٠	+٢,٢٣
٢	+٠,٧٢	-١,٠٤	١٣	+٢,٣٤	+٢,٥١
٣	+٠,٣٣	-١,٢٤	١٤	+٢,٧٥	+٢,٨٠
٤	-٠,٦٢	-١,٢٥	١٥	+٣,٥٤	+٣,٠٤
٥	-١,٢٨	-٠,٩٠	١٦	+٥,٢٦	+٢,٥٤
٦	-١,٩٥	+٠,٠٧	١٧	+٥,٩٣	+٠,٠٧
٧	+٠,٤٥	+٣,٠٤	١٨	+٥,٢٦	-٠,٩٠
٨	+١,٢٣	+٢,٨٠	١٩	+٤,٦١	-١,٢٥
٩	+١,٦٤	+٢,٥١	٢٠	+٣,٦٥	-١,٢٤
١٠	+١,٨٩	+٢,٢٣	٢١	+٣,٢٧	-١,٠٤
١١	+٢,٠١	+١,٩٩	٢٢	+٢,٩٨	-٠,٥٠

طول المنحني الناتج من دورة واحدة = ٢٠,٩٠١٨ وحدة قياس (طول المحور الكبير للشكل الاهليجي) .

الجدول(٢). نتائج البحث – النسب الرياضية للمنحني الناتج .

النقطة(p)	النسب		النقطة(p)	النسب	
	(u)	طول المنحني		(u)	طول المنحني
١	٣٢	٠,٦١٤٤	١١		١٠,٦٩٣٧
٢	٥١	١,٠٥٨١	١٢		١١,٠٦٧٨
٣	٩٠	٢,٠٢٤٩	١٣		١١,٥٧٥٤
٤	١٥٥	٢,٧٧٢٨	١٤		١٢,٤٠٠١
٥	٢٣٣	٣,٩٧٠٩	١٥		١٤,٢٤١٦
٦	٢٨٨	٦,٦٦٠٢	١٦		١٦,٩٣١
٧	٣١٨	٨,٥٠١٨	١٧		١٨,٠٨٧٥
٨	٣٤٤	٩,٣٢٦٤	١٨		١٨,٨٧٧
٩	٣٤٥	٩,٨٣٤١	١٩		١٩,٨٤٣٨
١٠	٣٦٠	١٠,٤٥٠٩	٢٠		٢٠,٩٠١٨

u : زاوية دوران الشكل الاهليجي الراسم على مسار المنحني (Degree) .

π : القيمة المطلقة (٣,١٤) .